

The Scale-Aware Sea Ice Project, SASIP, WP2

Colloque MathGeoPhy
26, 27 & 28 of October 2022, IHP

Modelling and simulation of sea ice dynamics

Stéphane Labbé

with
Jérôme Weiss, Matthias Rabatel, Dimitri Balasoiu,
Quentin Jouet, Sophie Théry and Toai Phan

This project is supported by Schmidt Futures – a philanthropic initiative that seeks to improve societal outcomes through the development of emerging science and technologies.



Glace de mer et banquise

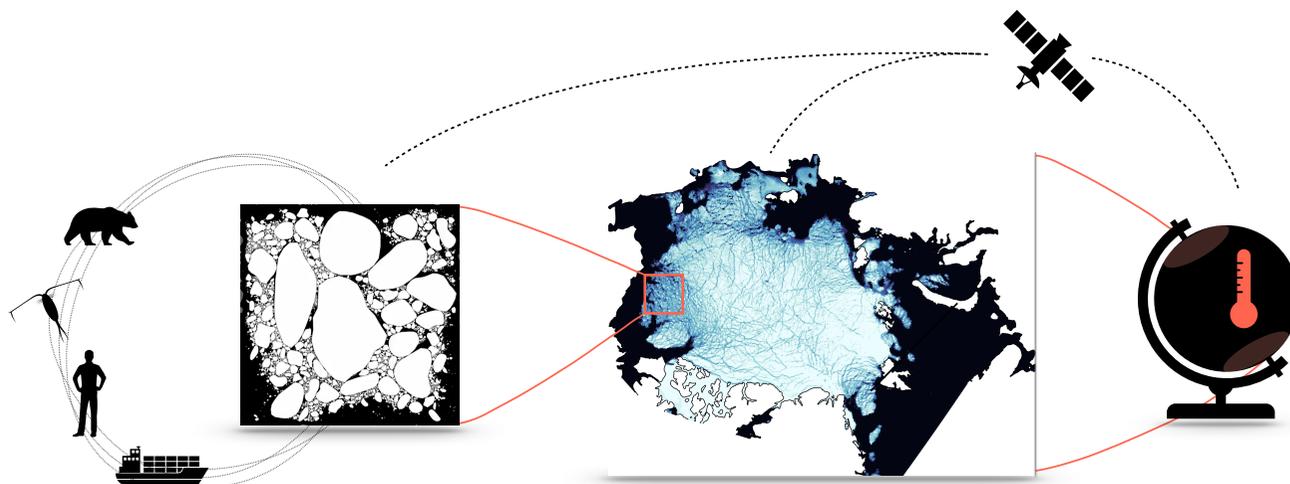
La **glace de mer** : couche de glace due au gel de la mer en surface. La couche est de l'ordre du mètre en épaisseur. Traitement en tant que **structure fine**.

La **banquise** : ensemble de plaques de glace de mer appelés **floes** et organisés en **packs**.

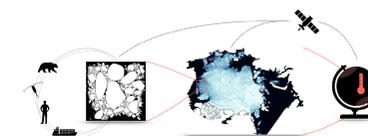


Glace de mer et banquise

Le projet SASIP pour la compréhension du climat



The Scale-Aware Sea Ice Project



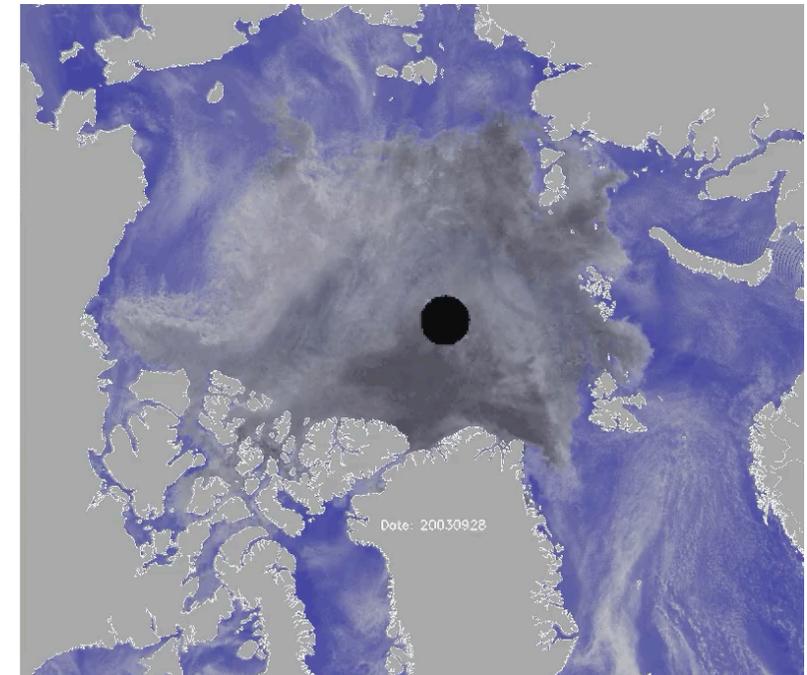
Un modèle granulaire

Objectifs

- Avoir une précision suffisante en termes de **conservation d'énergie** et de **dynamique** pour retrouver les phénomènes classiques.
- Prise en compte de **formes quelconques** de floes.
- Intégrer un phénomène de **dégradation** de la banquise.

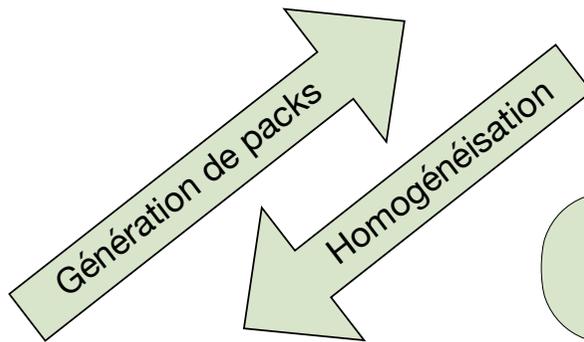
Contraintes de réalisation

- Effectuer des simulations sur des zones de **plusieurs kilomètres** en temps raisonnable.
- Simuler des zones dans lesquelles la **concentration** en glace est très forte (jusqu'à 80%).



Un modèle granulaire

Stratégie de développement du modèle



Modèle kilométrique

Modèle sans rupture

Thèse de Matthias Rabatel

Lien modèle micro et modèle macro

Pré-étude de la rupture

Thèse de Dimitri Balasoïu

Modélisation de la rupture

Algorithme de rupture

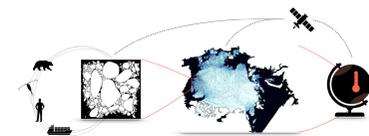
Thèse de Toai Phan

Points
d'étape

Comparaison aux expériences

Rupture par percussion

Rupture par flexion



Un modèle granulaire sans rupture

Principes

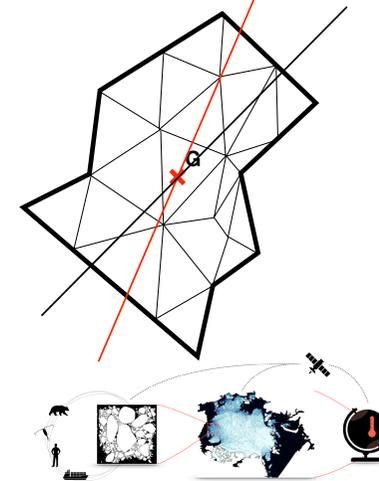
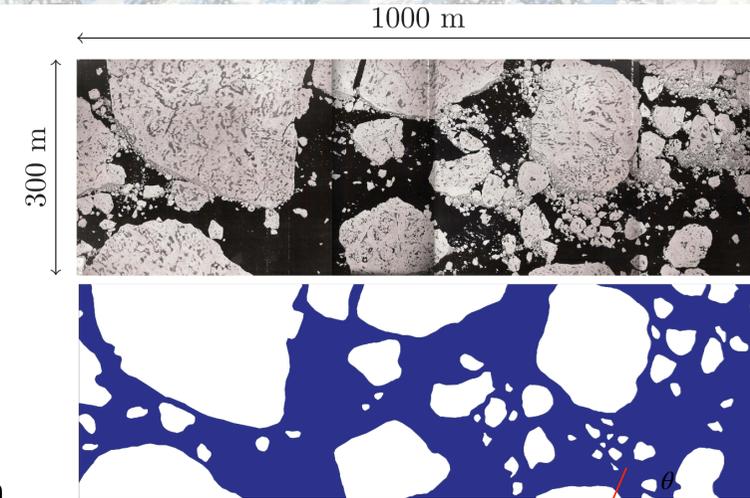
- Floes polygonaux, maillage par triangles.
- Traiter des assemblées de floes de tailles très hétérogènes.
- Prise en compte du vent, des courants marins, du drag océanique.
- Gestion des contacts sans interpénétration : condition de Signorini.
- Prise en compte des frottements : modèle de Coulomb.

Les floes, les configurations

Stockés « **individuellement** », repérés par leur position et leur angle et ont un facteur de taille.

Une **bibliothèque de floes** a été constituée permettant des tirages aléatoires réalistes grâce à segmentation d'images aériennes.

Les **tirages aléatoires de packs** sont effectués en fonction de la saison et de la distribution de taille de floes (modélisée via des lois puissance dont les paramètres sont évalués grâce à des observations).

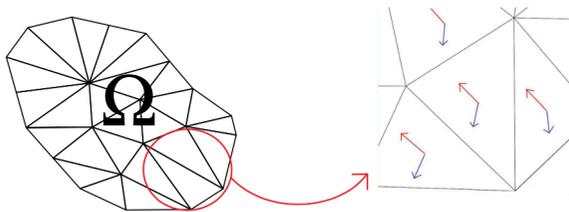


Un modèle granulaire sans rupture

Dynamique des packs de floes

Travaux en collaboration avec M. Rabatel

Phase de mouvement libre



Les **forces extérieures** sont appliquées sur chaque élément du floe discrétisé.

Table 1. Physical Model Parameters Used in the Simulations

| Constant Parameters | Symbol | Value | Units |
|-----------------------------------|----------------|-------------------------|----------|
| Earth's angular velocity | V_{Ω} | 7.292×10^{-5} | s^{-1} |
| Latitude | ϕ | Variable | rad |
| Coriolis parameter | f | $2V_{\Omega} \sin \phi$ | s^{-1} |
| Air density | ρ_a | 1.341 | kg/m^3 |
| Ice density | ρ | 917 | kg/m^3 |
| Water density | ρ_w | 1024.071 | kg/m^3 |
| Atmospheric skin drag coefficient | C_a | 1.7×10^{-3} | |
| Oceanic skin drag coefficient | C_w | 5×10^{-3} | |
| Ice floe velocity | \mathbf{V} | Variable | m/s |
| Surface current velocity | \mathbf{u}_w | Variable | m/s |
| Wind velocity | \mathbf{u}_a | Variable | m/s |
| Mesh size | s_m | $S/25$ | m^2 |

Forces
extérieures

Effet Coriolis

$$\mathcal{F}_c = -f \mathbf{k} \wedge \mathbf{V} \text{ où } \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Action du vent, forçage atmosphérique

$$\tau_a = \rho_a C_a \|\mathbf{u}_a\| \mathbf{u}_a$$

Drag océanique

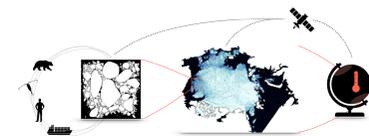
$$\tau_w = \rho_w C_w \|\mathbf{u}_w - \mathbf{V}\| (\mathbf{u}_w - \mathbf{V})$$

Équation des moments

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = M \mathcal{F}_c + \int_{\Omega} \tau_a + \tau_w dx$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = \int_{\Omega} \mathbf{r} \wedge (\tau_a + \tau_w) dx$$

Équation du
mouvement



Un modèle granulaire sans rupture

Dynamique des packs de floes

Phase de choc, détection de la collision

Niveaux de collision

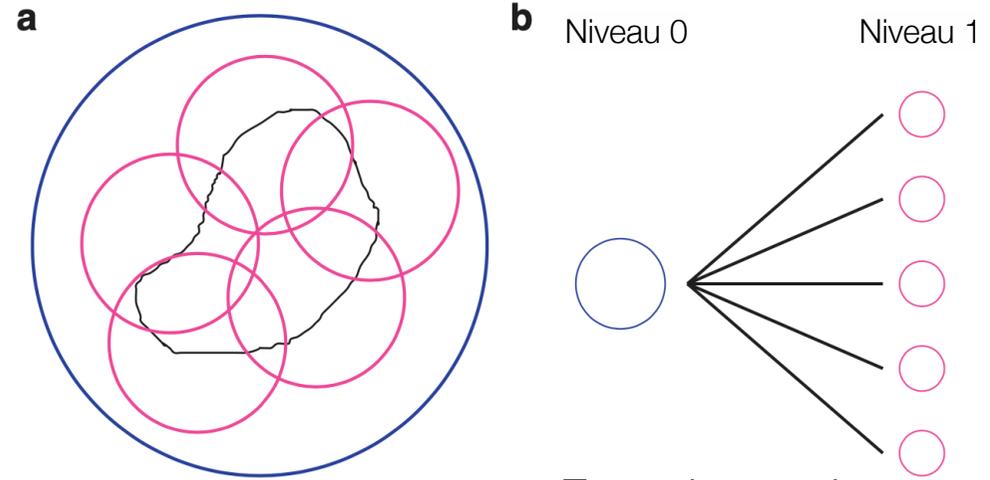
Deux niveaux de collision pour détecter les contacts.

Pour deux floes Ω_i et Ω_j , la distance est calculée en exploitant ces deux niveaux afin d'accélérer les calculs.

si $\mathcal{L}_{0,i} \cap \mathcal{L}_{0,j} = \emptyset : d_{\mathcal{X}}(\Omega_i, \Omega_j) = d(\mathcal{L}_{0,i}, \mathcal{L}_{0,j})$

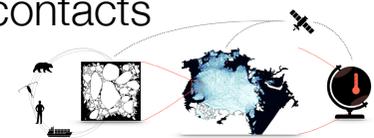
$d_{\mathcal{X}}(\Omega_i, \Omega_j)$ si $\mathcal{L}_{0,i} \cap \mathcal{L}_{0,j} \neq \emptyset$ et $\mathcal{L}_{1,i} \cap \mathcal{L}_{1,j} = \emptyset : d_{\mathcal{X}}(\Omega_i, \Omega_j) = d(\mathcal{L}_{1,i}, \mathcal{L}_{1,j})$

sinon $d_{\mathcal{X}}(\Omega_i, \Omega_j) = d(\Omega_i, \Omega_j)$



Zone de pas de temps grossier

Zones de pas de temps fin, algorithme de gestion des contacts

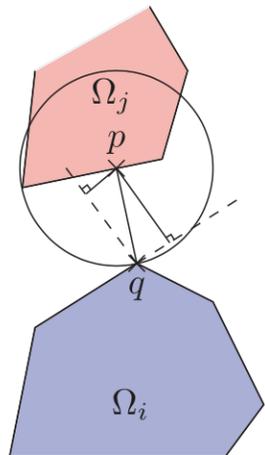


Un modèle granulaire sans rupture

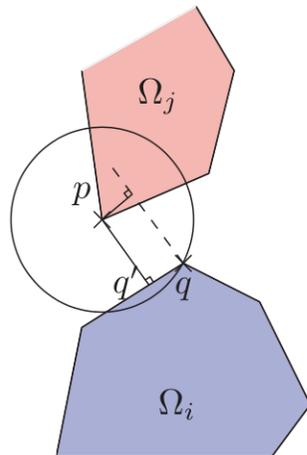
Dynamique des packs de floes

Phase de contact

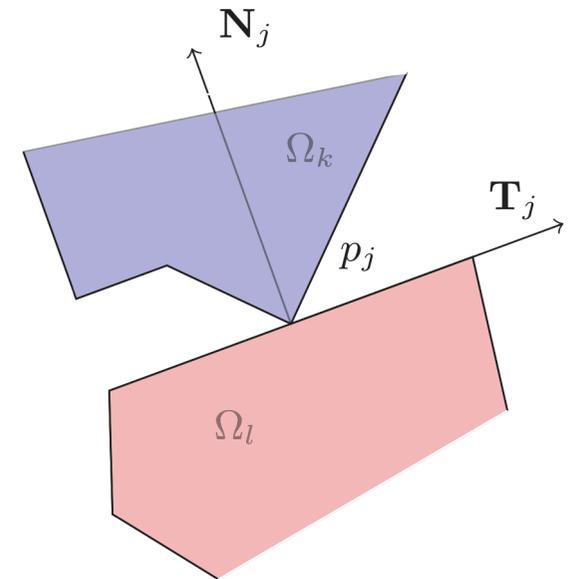
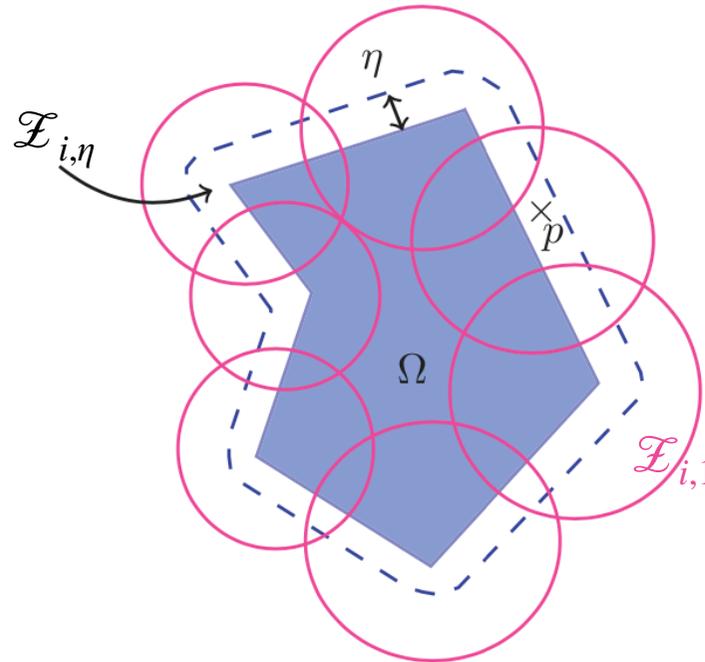
Problème des multi-contacts : les inconnus sont les impulsions des floes.



Sommet à coté

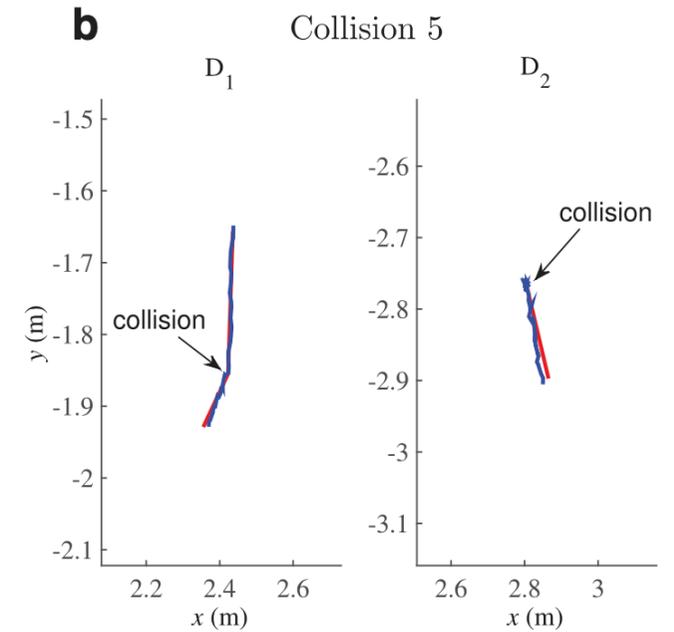
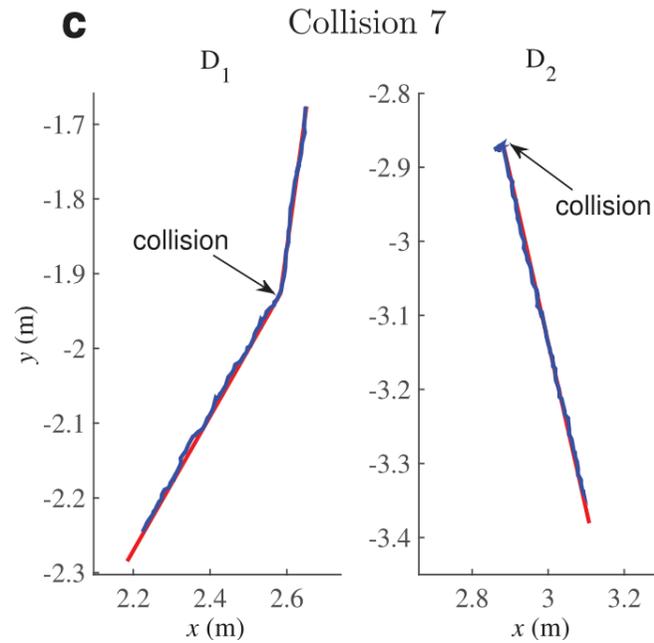
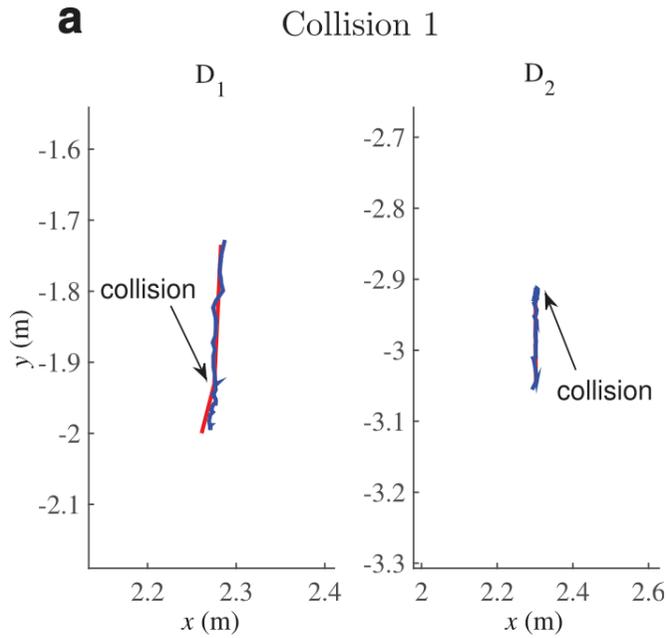


Sommet à sommet



Un modèle granulaire sans rupture

Tests en bassin

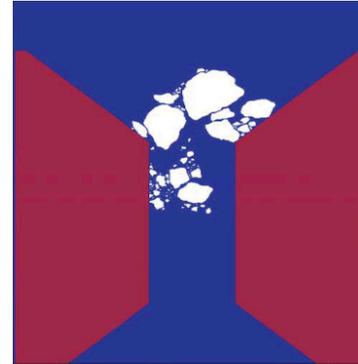


Un modèle granulaire sans rupture

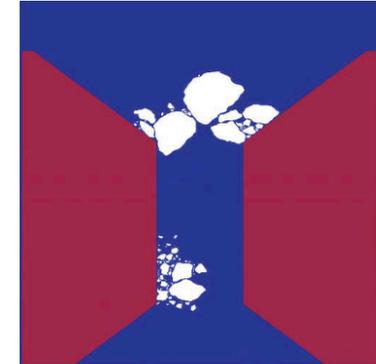
Exemple de mouvement de groupe dans un canal

Les simulations sont effectuées avec et sans force de Coriolis.

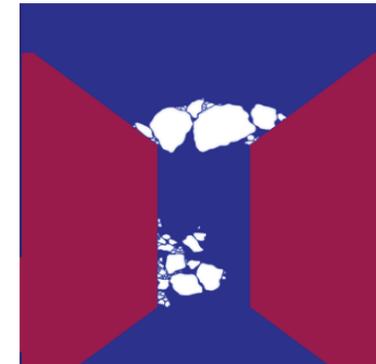
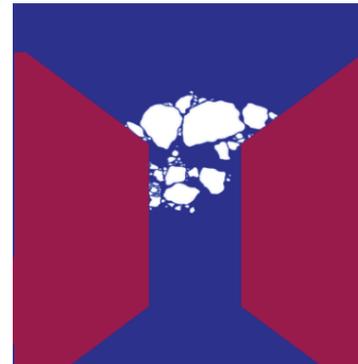
Test 1 (without \mathfrak{F}_c) 2h04



3h40



Test 5 (with \mathfrak{F}_c)



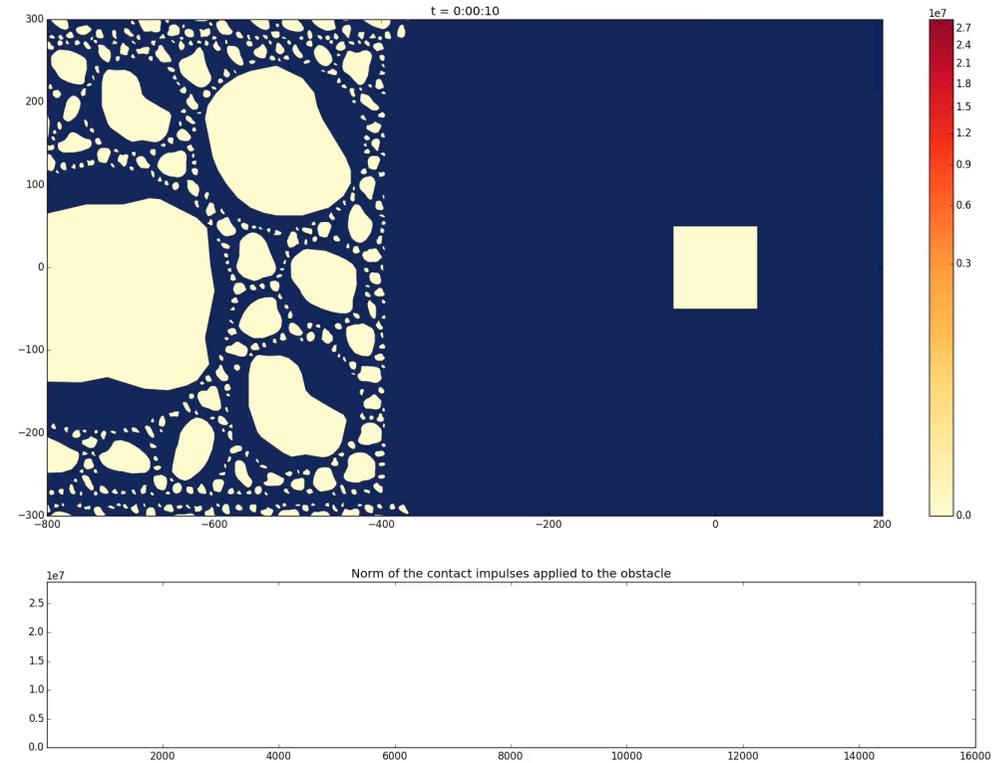
Un modèle granulaire sans rupture

Ile soumise à un pack de glace

Représente une ile dans un estuaire.

Calcul effectué avec 4500 floes.

Tracé des énergies d'impacts pouvant comparé à une mesure sismique sur l'île.

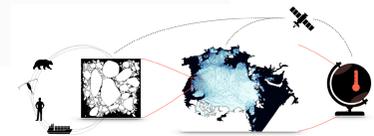
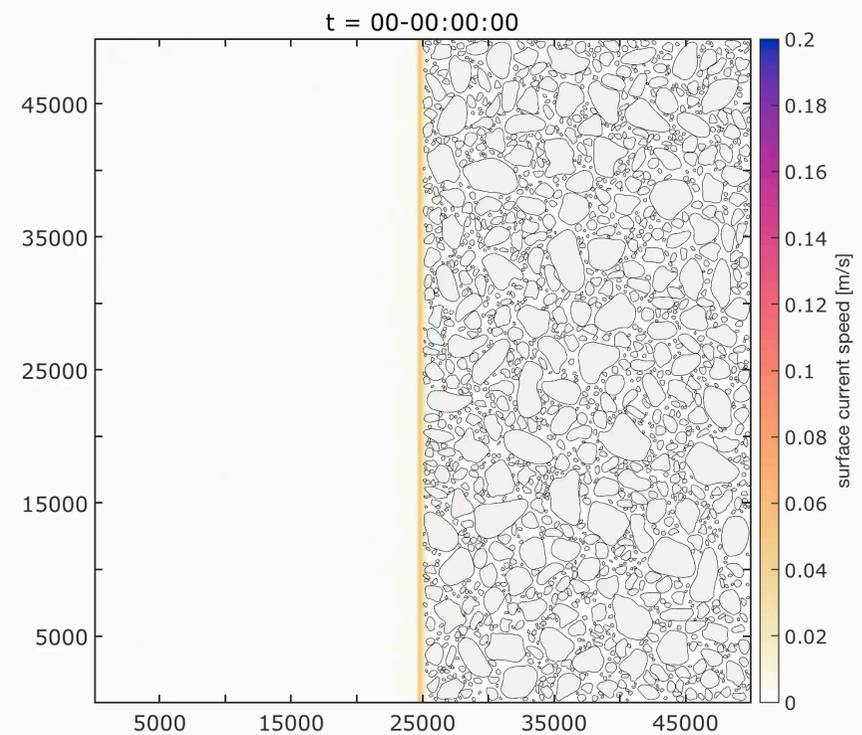


Un modèle granulaire sans rupture

Pack transporté par un écoulement complexe

Calculs réalisés par S. Brenner

Premier pas vers le couplage avec des codes de calcul pour les courants marins.



Un modèle granulaire sans rupture

Performances

Travaux réalisés avec M. Rabatel et Q. Jouet (version parallèle)

Séquentiel (sur PC de bureau)

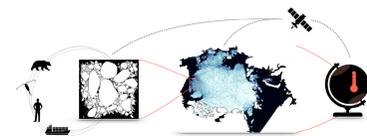
- 350 floes, une simulation de 7 jours en 2 à 12 heures de calcul.
- 2800 floes, une simulation de 7 jours en 2 à 7 jours de calcul.

Problématique : gestion du nombre de collisions.

Parallèle (cluster Luke, LJK)

prise en compte pouvant aller jusqu'à 400 000 floes.

- 25 000 floes, une simulation de 7 jours en 2 jours de calcul (122 coeurs).
- 128 000 floes, une simulation de 12 heures en 12 heures de calcul (530 coeurs).



Un modèle granulaire sans rupture

Performances

Travaux réalisés avec M. Rabatel et Q. Jouet (version parallèle)

Séquentiel (sur PC de bureau)

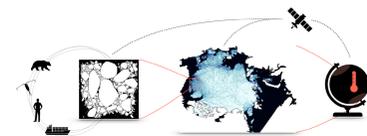
- 350 floes, une simulation de 7 jours en 2 à 12 heures de calcul.
- 2800 floes, une simulation de 7 jours en 2 à 7 jours de calcul.

Problématique : gestion du nombre de collisions.

Parallèle (cluster Luke, LJK)

prise en compte pouvant aller jusqu'à 400 000 floes.

- 25 000 floes, une simulation de 7 jours en 2 jours de calcul (122 coeurs).
- 128 000 floes, une simulation de 12 heures en 12 heures de calcul (530 coeurs).



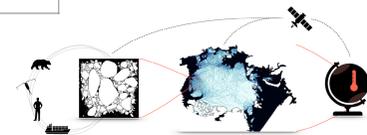
Un modèle granulaire sans rupture

Performances

Travaux réalisés Q. Jouet

Temps pour une itération représentant 10 secondes de temps physique.

| Nombre de floes | Nombre de coeurs | | | | | | | | |
|-----------------|------------------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| | 26 | 50 | 122 | 226 | 362 | 442 | 730 | 962 | 1522 |
| 10 000 | 0,8 s | 0,6 s | | | | | | | |
| 16 000 | | 1 s | 0,6 s | | | | | | |
| 45 000 | | | 1,4 s | 1 s | | | | | |
| 64 000 | | | | 1,65 s | 1,35 s | | | | |
| 100 000 | | | | | 1,6 s | 1,4 s | | | |
| 128 000 | | | | | 2,2 s | 2 s | | | |
| 180 000 | | | | | | 2,8 s | 2,5 s | | |
| 410 000 | | | | | | | | 4,7 s | 4,9 s |



Un modèle granulaire avec rupture

Principes

- Adopter un mécanisme de fracture et une discrétisation compatibles avec les impératifs de temps de calcul.
- Prendre en compte deux type d'initiation de fractures : la flexion et la percussion.

Outils théorique

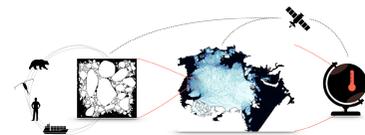
- Le modèle de Francfort et Marigo basé sur la théorie de Griffith de rupture pour les matériaux élastiques (élasticité linéaire).

Inconvénients

- cher en calculs avec les méthodes usuelles. Impossible d'utiliser les modèles relaxées développées et étudiées par Ambrosio et Tortorelli.
- impossible d'inclure une méthode de raffinement de maillages.

Les solutions envisagées

- exploiter le modèle de Griffith tel quel en simplifiant les ensembles de fractures en fonction du problème.
- se départir des maillages, dans une grande mesure, pour le suivi de la fracture.
- La Γ -convergence pour étudier le lien entre comportements macroscopiques et microscopiques et ainsi modéliser le phénomène de percussion.
- L'étude des plaques minces pour modéliser la flexion et l'initiation de fractures via la houle.

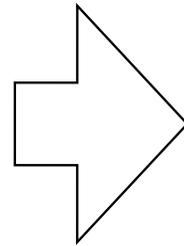


Un modèle granulaire avec rupture

Cadre

Les vitesses caractéristiques

- Vitesse des floes : 10 cm/s.
- Vitesse de propagation des fractures : 300 m/s.
- Vitesse des ondes élastiques : 1 800 m/s.



Les phénomènes **élastiques / fracturations** sont assimilés comme **quasi-statiques** en regard de la dynamique des floes.

Les caractéristiques de la glace

La glace se brise en ligne droite, en moyenne, dans la majorité des floes de glace. Ainsi, afin d'exploiter cette particularité, la plupart des recherches de fracture s'effectueront dans l'ensemble des fractures droites.



Un modèle granulaire avec rupture

Modèle basé sur les travaux de Griffith / Francfort et Marigo

Travaux en collaboration avec D. Balasoiu

$$E(u, \sigma) = \inf_{\sigma \in \Sigma} \inf_{u \in V_\sigma} \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(u) dx + \mathcal{H}^1(\sigma)$$

Les espaces de travail

$$\Sigma = \{[a, b] \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \partial\Omega, b \in \bar{\Omega},]a, b[\in \Omega\}$$

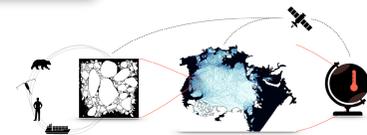
$$V_\sigma = \{u \in H^1(\Omega \setminus \sigma, \mathbb{R}^2) \mid u = U_D \text{ sur } \partial\Omega_D \setminus \sigma, (u^+ - u^-) \cdot \nu \geq 0 \text{ sur } \sigma\}$$

Théorème

Le problème de minimisation

$$\inf_{\sigma \in \Sigma} \inf_{u \in V_\sigma} \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(u) dx + \mathcal{H}^1(\sigma)$$

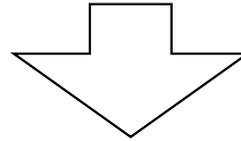
admet une solution sur $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} V_\sigma$.



Un modèle granulaire avec rupture

Modèle basé sur les travaux de Griffith / Francfort et Marigo

Algorithme de fracturation : par augmentation **incrémentale** de la charge.



Les fractures peuvent être des lignes brisées.

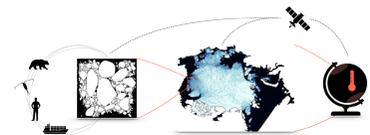
On pose, pour σ ligne brisée, l'ensemble des fractures dans le processus incrémental

$$\Sigma_{\emptyset} = \Sigma, \Sigma_{\sigma} = \{\sigma \cup [a, b] \in \mathbb{R}^2 \mid a = \text{fin}(\sigma), b \in \overline{\Omega},]a, b[\subset \Omega \setminus \sigma\}$$

Conjecture

Étude théorique effectuée dans le cadre de la thèse de Dimitri Balasoïu. Un point reste à éclaircir

Une ligne de fracture, au cours d'un processus incrémentale de fracturation par augmentation linéaire de la charge, ne peut pas se recouper.



Un modèle granulaire avec rupture

Une méthode d'éléments finis adaptée

Les éléments finis classiques comme base

On pose ainsi $\mathcal{T}(\Omega)$ l'ensemble de \mathcal{T} tels que

$$\mathcal{T} = \bigcup_{i=\{0,1,2\}} \mathcal{T}_i$$

On introduit les notations suivantes

$\forall (i, j) \in \{0,1,2\}, \forall \omega \in \mathcal{T}_i$ on pose $\mathcal{V}_j(\omega) = \{\omega' \in \mathcal{T}_j \mid \bar{\omega} \cap \bar{\omega}' \neq \emptyset\}$

$\forall (p, q) \in (\mathcal{T}_0)^2, e_p(q) = \delta_{pq}, \forall \omega \in \mathcal{T}_2, e_p \in \mathcal{L}(\omega; \mathbb{R}), e_p \in C^0(\Omega; \mathbb{R})$

Espace de travail des éléments finis : $W(\mathcal{T}, \mathbb{R}^2) = \text{vect}((e_p u_x, e_p u_y)_{p \in \mathcal{T}_0})$

On pose : $\bar{h}(\mathcal{T}) = \sup_{\omega \in \mathcal{T}_2} \text{diam}(\omega), \underline{h}(\mathcal{T}) = \inf_{\omega \in \mathcal{T}_2} \text{diam}(\omega), n(\mathcal{T}) = \#\mathcal{T}_0$

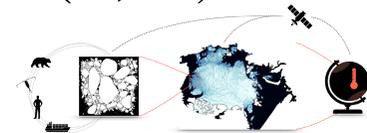
$\mathcal{L}(\omega; \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\omega; \mathbb{R}) \mid f \text{ affine} \}$

- (i) $\forall i \in \{0,1,2\}, \mathcal{T}_i \subset \mathcal{P}(\bar{\Omega}) \mid \forall \omega \in \mathcal{T}_i, \text{dim}(\omega) = i,$
- (ii) $\forall (\omega, \omega') \in (\mathcal{T})^2, \omega \cap \omega' = \emptyset,$
- (iii) $\bigcup_{\omega \in \mathcal{T}} \omega = \bar{\Omega},$
- (iv) $\forall i \in \{1,2\}, \forall (\omega, \omega') \in (\mathcal{T}_i)^2, \bar{\omega} \cap \bar{\omega}' \in \{\bar{\mathcal{T}}_{i-1}, \emptyset\},$
- (v) $\forall \omega \in \mathcal{T}_2, \omega$ est un simplexe de $\mathbb{R}^2.$

Convergences

Soit \mathcal{T}_\bullet une suite de $\mathcal{T}(\Omega)$ telle que \mathcal{T}_\bullet ait comme « limite » Ω et soit croissante au sens des inclusions.

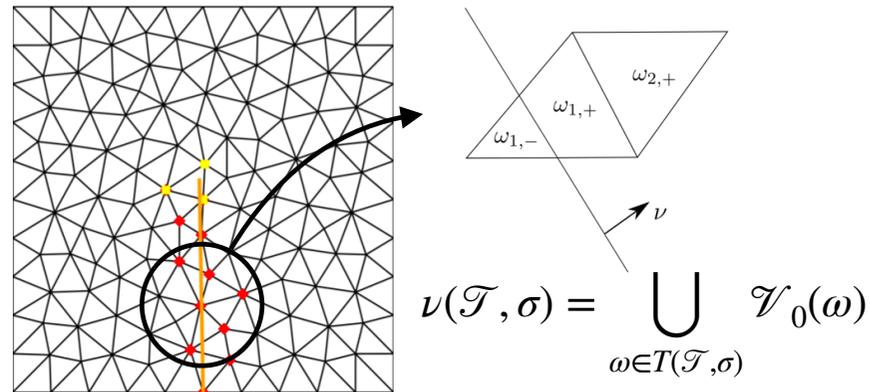
La suite d'espaces $W_\bullet = (W(\mathcal{T}, \mathbb{R}^2))_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_\bullet}$ converge également vers $H^1(\Omega; \mathbb{R}^2).$



Un modèle granulaire avec rupture

Une méthode d'éléments finis adaptée

Soit σ une fracture, c'est à dire une ligne brisée



$$\nu(\mathcal{T}, \sigma) = \bigcup_{\omega \in T(\mathcal{T}, \sigma)} \mathcal{V}_0(\omega)$$

$$T(\mathcal{T}, \sigma) = \{\omega \in \mathcal{T}_2 \mid \sigma \cap \omega \neq \emptyset\}$$

Pour tout p dans $\nu(\mathcal{T}, \sigma)$, e_p est remplacé par

$$e_p^+ = e_p \sum_{\omega \in T(\mathcal{T}, \sigma)} \mathbb{1}_{\omega}^+, \quad e_p^- = e_p \sum_{\omega \in T(\mathcal{T}, \sigma)} \mathbb{1}_{\omega}^-$$

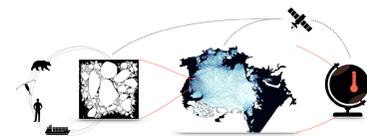
Alors, la nouvelle suite espaces $W_{\bullet}(\sigma)$ est construite en prenant en compte ces nouveaux éléments.

Théorème

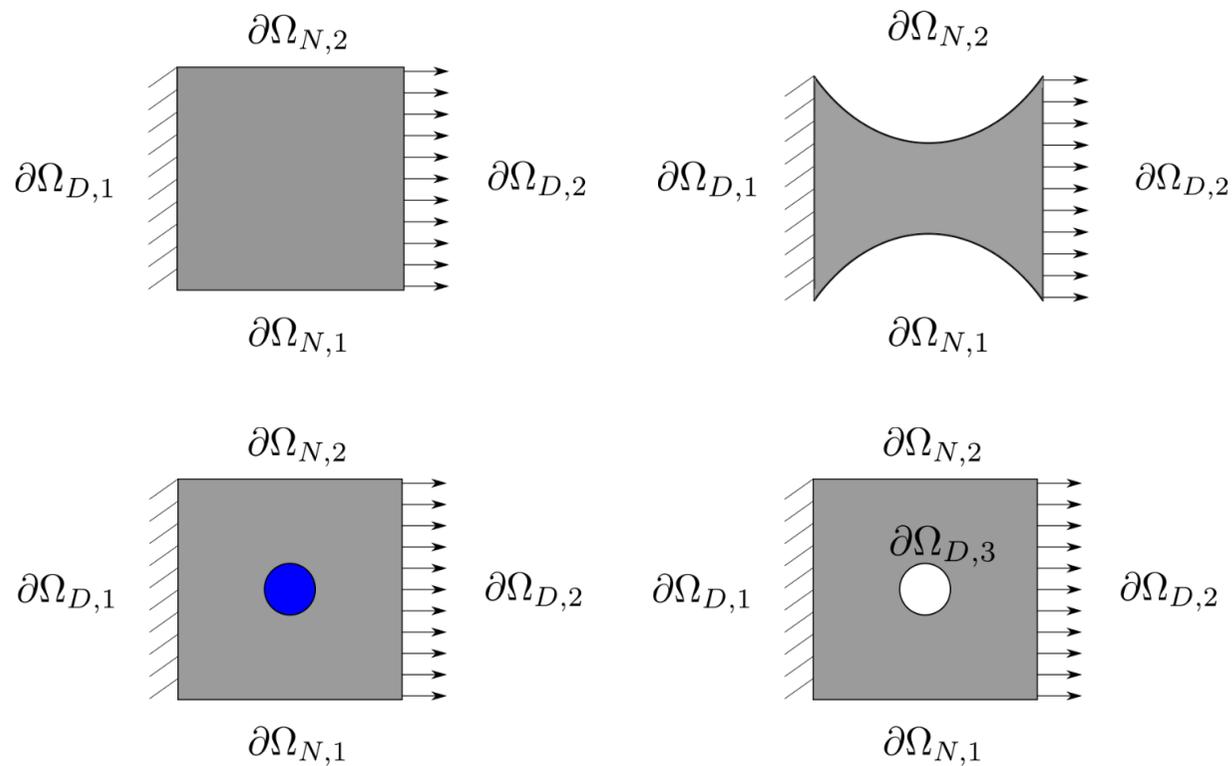
L'énergie approchée $E_{tot, \bullet}$ Γ -converge vers E_{tot} , où E_{tot} est l'énergie associée au problème de fracturation.

Théorème

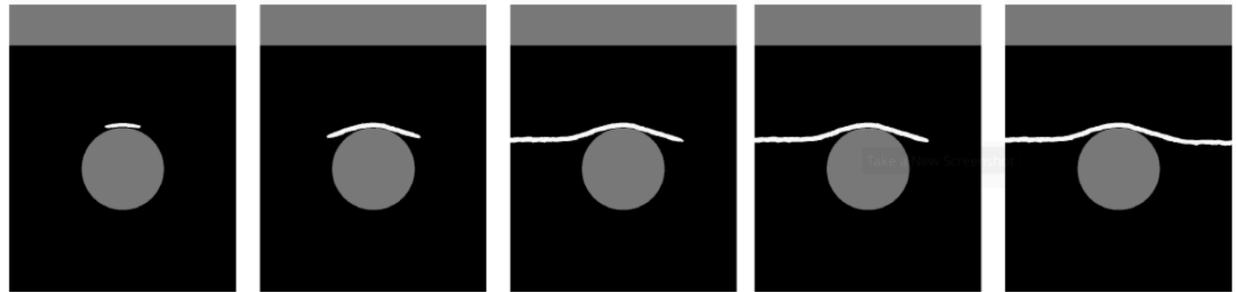
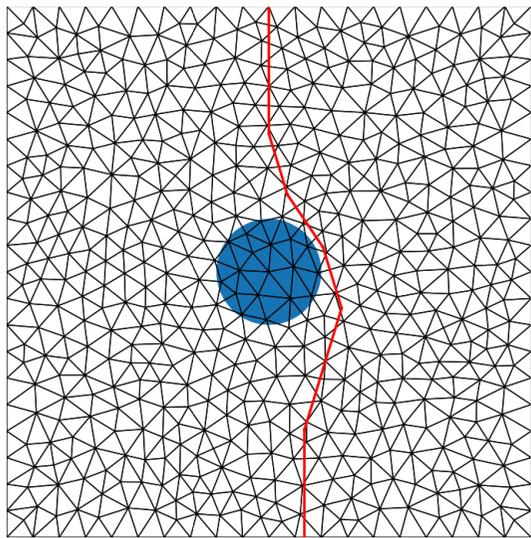
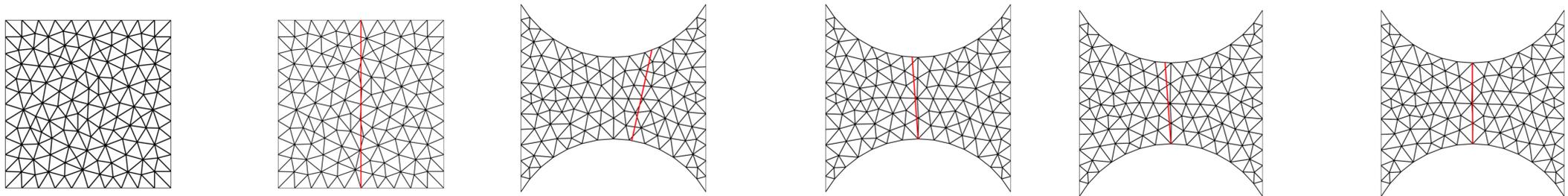
$$\lim_{\bullet} W_{\bullet}(\sigma) = H^1(\Omega \setminus \sigma)$$



Un modèle granulaire avec rupture



Un modèle granulaire avec rupture



Extrait de travaux de B. Bourdin

Un modèle granulaire avec rupture

Initiation de la rupture

Travail en cours avec Toaï Phan

Initiateur de la rupture : le mouvement des vagues et les percussions entre floes.

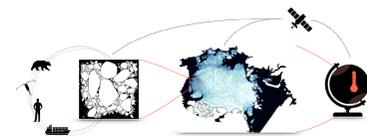
Question : comment modéliser une percussions pouvant entraîner une rupture ?

Les vagues

Mécanique de la flexion (travail effectué par Jean-Pierre Auclair et Véronique Dansereau).

Le mécanisme de **flexion** peut donc être intégré dans le problème d'**élasticité linéaire** exploité pour la rupture (Critère de Griffith).

La difficulté : on exploite les profils spectraux des vagues, il faut donc mettre en place un système aléatoire de localisation des points de flexion (en cours d'étude).

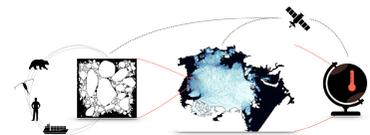


Un modèle granulaire avec rupture

Percussion, la modélisation

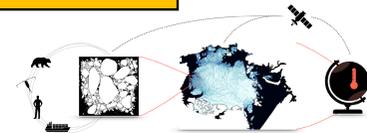
Les questions :

- 1- quelle condition de bord donne une percussion ?
- 2- Cette condition est-elle toujours localisée ?
- 3- Si non à (2), peut-on trouver une condition pour assurer cette localité ?



Un modèle granulaire avec rupture

Percussion, la modélisation, plan de développement



Un modèle granulaire avec rupture

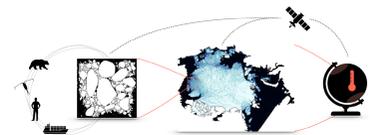
Percussion, le modèle microscopique

Soit un réseau \mathcal{T} de \mathbb{R}^2 dont les objets de dimension 1 sont des ressorts de raideur k et les objets de dimension 0 des masses et des ressorts de torsion reliant les ressorts voisins. Soit q_0 un objet de dimension 1 sur le bord de \mathcal{T} (bord de l'union de tous les objets de dimension 2 de \mathcal{T}). Grâce à l'utilisation d'un résultat de type Tikonov, on démontre le théorème suivant :

Théorème

Si q_0 a une vitesse initiale v_0 et que pour tout q dans $\mathcal{T}_0 \setminus \{q_0\}$ la vitesse initiale est nulle, alors, il existe une vitesse série de vitesses critiques $(v_{0,i})_{i \in \{1, \dots, n\}}$ tel que, seuls les points dans $\mathcal{T}_0 \setminus \mathcal{V}_n(q_0, \mathcal{T})$ auront une vitesse non nulle au cours du temps à un mouvement solide près de \mathcal{T} proche de la position initiale (au sens sans interpénétrations).

Ce résultat permet à la limite d'obtenir une **condition de percussion localisée**.



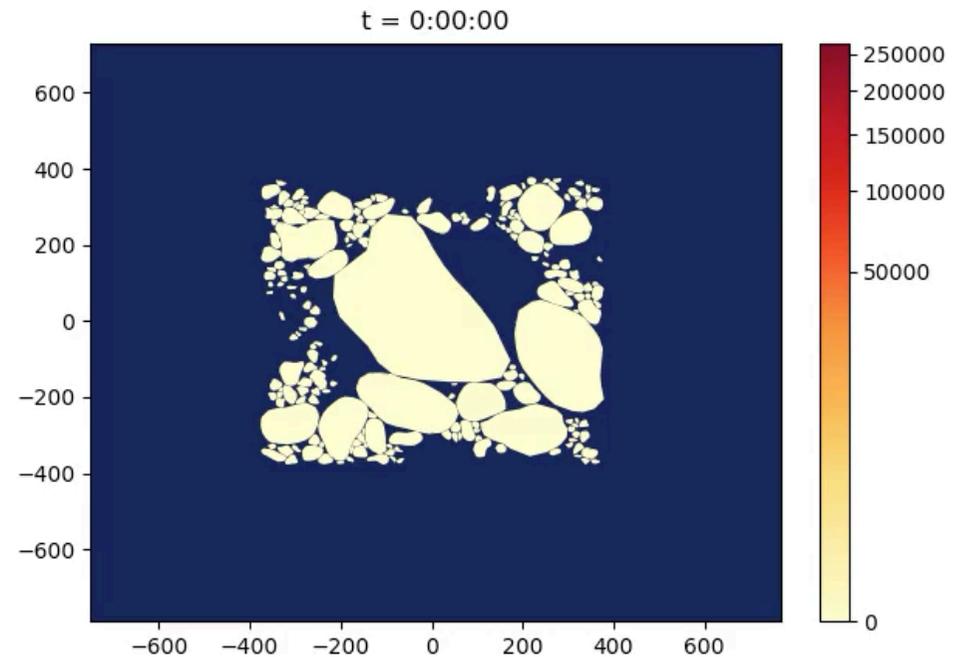
Un modèle granulaire avec rupture

Test du moteur de gestion des fractures

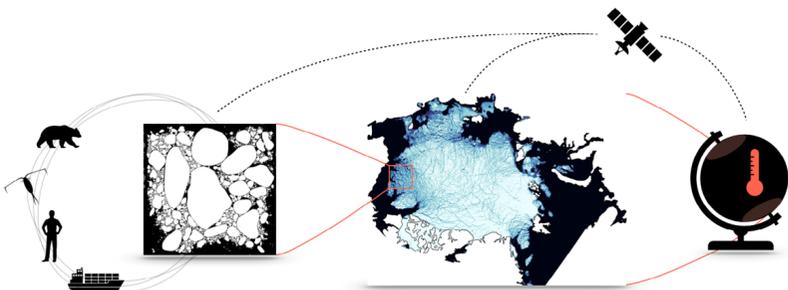
Le moteur orienté objet gère la séparation des floes fracturés avec ici une méthode de fracturation se bornant à un tirage aléatoire de la fracture.

Cette approche orientée objets permet de séparer les deux aspects du problème :

- comment fracturer un floe et sous quelle contrainte ?
- Comment gérer un assemblé de floes dont le nombre varie et comment gérer la séparation de deux floes ?



Implémentations et calculs réalisés par S. Théry et Q. Jouet



Thank you for your attention!

Stéphane Labbé / stephane.labbe@sorbonne-universite.fr

This project is supported by Schmidt Futures – a philanthropic initiative that seeks to improve societal outcomes through the development of emerging science and technologies.

