Modélisation stochastique de phénomènes de rupture en géophysique

Madalina Deaconu

Inria Nancy - Grand Est & Institut Élie Cartan de Lorraine

École 2022 du GdR CNRS MathGeoPhy

26 Octobre 2022, Institut Henri Poincaré

Quel type de problème ?

Objectif : Caractériser et prédire des **phénomènes de rupture** en *géophysique : avalanche, éboulement de terrain, etc.*

Comment

- **Construction d'un modèle**
  - une représentation simplifiée du phénomène
  - dans notre cas l'évolution au cours du temps de la masse des particules dans le système

- **Pourquoi ?** Répondre aux questions précises :
  - Comprendre
  - Simuler
  - Prédire
  - Généraliser

Plan

- Introduction au modèle
  - Motivation : exemples de coagulation / fragmentation
  - Équation de coagulation / fragmentation
- Approche probabiliste
  - Équation de coagulation
  - Équation de fragmentation
- Applications
  - Fragmentation et avalanche
  - Méthodes numériques probabilistes
- Conclusions et perspectives

Introduction -
Équation de coagulation / fragmentation

Introduction

Motivation : exemples de coagulation / fragmentation

- Modèles de coagulation
  - en astrophysique : la formation des étoiles et planètes
  - en chimie : la formation des chaînes de polymères
  - en physique : la formation de particules colloïdales (Smoluchowski 1916)
  - en génétique des populations : la coalescence des lignées ancestrales
  - en mathématiques : théorie des arbres ou des graphes aléatoires
  - **en géophysique** : accumulation de la neige des avalanches, etc.

- Modèles de fragmentation
  - en astrophysique : fragmentation stellaires, météorites
  - en christallographie : la fragmentation des cristaux
  - en physique nucléaire : la fission des atomes
  - **en géophysique** : phénomènes de rupture de type avalanches, glissements de terrain, tremblements de terre, etc.

Modélisation

Idée

Cadre : Un système physique qui évolue dans le temps, formé de particules (clusters), caractérisées entièrement par leur masse.

Deux phénomènes (on note P_i une particule de masse i)

- Coagulation Deux particules peuvent se coller ensemble en donnant naissance à une particule de masse plus grande.

$$P_i + P_j \to P_{i+j}$$

- Fragmentation Une particule peut se casser en plusieurs particules.

$$P_i \to P_k + P_{i-k}, \text{ pour } k \leq i.$$

On suppose :

- Coagulation / Fragmentation binaires
- Conservation de la masse

Introduction

Modèle mathématique coagulation - Équation de Smoluchowski

- Modèle masse continue
  - Les particules sont entièrement caractérisées par leur masse
  - Équation pour décrire l'évolution de la $c(t, x)$ = concentration des particules de masse x à l'instant t dans le système

Introduction

Modèle mathématique coagulation - Équation de Smoluchowski

- Modèle masse continue
  - Les particules sont entièrement caractérisées par leur masse
  - Équation pour décrire l'évolution de la $c(t,x)$ = concentration des particules de masse x à l'instant t dans le système

- Équation de Smoluchowski

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}c(t,x) &= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x K(y,x-y)c(t,y)c(t,x-y)\mathrm{d}y \\ & \qquad -c(t,x)\displaystyle\int_0^\infty K(x,y)c(t,y)\mathrm{d}y, \ \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}_+, \\ c(0,x) &= c_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \qquad (EC)$$

Introduction

Modèle mathématique coagulation - Équation de Smoluchowski

- Modèle masse continue
  - Les particules sont entièrement caractérisées par leur masse
  - Équation pour décrire l'évolution de la $c(t,x)$ = concentration des particules de masse x à l'instant t dans le système

- Équation de Smoluchowski

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}c(t,x) &= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x K(y,x-y)c(t,y)c(t,x-y)\mathrm{d}y \\ & \qquad -c(t,x)\displaystyle\int_0^\infty K(x,y)c(t,y)\mathrm{d}y,\ \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}_+, \\ c(0,x) &= c_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \qquad (EC)$$

- Propriétés et remarques
  - Coagulation binaire
  - $K : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ noyau de coagulation symétrique $K(x,y) = K(y,x)$
  - Conservation de la masse
  - Équation integro-différentielle nonlinéaire complexe —> difficile à résoudre

Introduction

Modèle mathématique coagulation - Équation de Smoluchowski

- Équation de Smoluchowski

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} c(t,x) & = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x K(y, x-y)c(t,y)c(t,x-y)\mathrm{d}y \\ & \qquad -c(t,x)\displaystyle\int_0^\infty K(x,y)c(t,y)\mathrm{d}y, \ \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}_+, \\ c(0,x) & = c_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \qquad (EC)$$

- Interprétation
  - Le terme rouge du membre de droite : création de particules de masse x après coagulation de particules de masse y et $x-y$.
  - Le terme bleu du membre de droite : disparition de particules de masse x après coagulation de particules de masses x et y.

Introduction

Modèle mathématique - Équation de fragmentation

- Modèle masse continue
  - Les particules sont entièrement caractérisées par leur masse
  - Équation pour décrire l'évolution de la $c(t, x) =$ concentration des particules dans le système

Introduction

Modèle mathématique - Équation de fragmentation

- Modèle masse continue
  - Les particules sont entièrement caractérisées par leur masse
  - Équation pour décrire l'évolution de la $c(t,x)$ = concentration des particules dans le système
- Équation de fragmentation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}c(t,x) & = \displaystyle\int_x^\infty F(x,y-x)c(t,y)\mathrm{d}y \\ & \quad -\dfrac{1}{2}c(t,x)\displaystyle\int_0^x F(y,x-y)\mathrm{d}y, \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}_+, \\ c(0,x) & = c_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \qquad (EF)$$

Introduction

Modèle mathématique - Équation de fragmentation

- Modèle masse continue
  - Les particules sont entièrement caractérisées par leur masse
  - Équation pour décrire l'évolution de la $c(t,x)$ = concentration des particules dans le système
- Équation de fragmentation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}c(t,x) & = \displaystyle\int_x^\infty F(x,y-x)c(t,y)\mathrm{d}y \\ & \quad -\dfrac{1}{2}c(t,x)\displaystyle\int_0^x F(y,x-y)\mathrm{d}y, \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}_+, \\ c(0,x) & = c_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \qquad (EF)$$

- Propriétés et remarques
  - Fragmentation binaire
  - $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ noyau de fragmentation $F(x,y) = F(y,x)$
  - Conservation de la masse
  - Équation integro-différentielle linéaire complexe —> difficile à résoudre

Introduction

Modèle mathématique - Équation de fragmentation

- Équation de fragmentation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} c(t,x) & = \displaystyle\int_x^{\infty} F(x, y-x) c(t,y) \mathrm{d}y \\ & \quad - \dfrac{1}{2} c(t,x) \displaystyle\int_0^x F(y, x-y) \mathrm{d}y, \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}_+, \\ c(0,x) & = c_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \qquad (EF)$$

- Interprétation
  - Le terme rouge du membre de droite : création de particules de masse x après fragmentation d'une particule de masse y en deux particules de masses x et $y - x$.
  - Le terme bleu du membre de droite : disparition de particules de masse x après fragmentation en deux particules de masses y et $x - y$.

Introduction

Modèles de coagulation / fragmentation

- Équation (ECF)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}c(t,x) &= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x K(y,x-y)c(t,y)c(t,x-y)\mathrm{d}y \\ & \quad + \displaystyle\int_x^\infty F(x,y-x)c(t,y)\mathrm{d}y \\ & \quad - c(t,x)\displaystyle\int_0^\infty K(x,y)c(t,y)\mathrm{d}y \\ & \quad - \dfrac{1}{2}c(t,x)\displaystyle\int_0^x F(y,x-y)\mathrm{d}y, \ \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}_+, \\ c(0,x) &= c_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \qquad (ECF)$$

- Propriétés et remarques
  - Coagulation et fragmentation binaires
  - F, $K : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ noyaux symétriques
  - Conservation de la masse

$$\int_0^\infty xc(t,x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty xc_0(x)\mathrm{d}x = 1, \ \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Approche probabiliste

Équation de coagulation / fragmentation stochastique

- **Prémices**
  - Conservation de la masse

$$\int_0^\infty xc(t,x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty xc_0(x)\mathrm{d}x = 1, \forall t \geq 0.$$

  - Probabilité $Q_t(\mathrm{d}x) = xc(t,x)\mathrm{d}x$, pour tout $t \geq 0$.

Approche probabiliste

Équation de coagulation / fragmentation stochastique

- **Prémices**
  - Conservation de la masse

$$\int_0^\infty xc(t,x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty xc_0(x)\mathrm{d}x = 1, \forall t \geq 0.$$

  - Probabilité $Q_t(\mathrm{d}x) = xc(t,x)\mathrm{d}x$, pour tout $t \geq 0$.
- **Objectifs et étapes**
  - Un premier exemple d'approche probabiliste : processus de branchement / coagulation et noyaux simples
  - Construire un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ de loi $Q_t(\mathrm{d}x)$
  - Forme faible de l'équation (EF) pour introduire l'interprétation probabiliste
  - Construction d'un processus de Markov à sauts (équation différentielle stochastique)
  - Obtenir des propriétés et des procédures de simulation de la solution de (EF) avec cette interprétation

Équation de coagulation - un premier pas vers les probabilités

Équation de coagulation - un premier pas vers les probabilités

Equation de coagulation - masse discrète & noyau simple $K(i,j) = i + j$
La plus petite taille d'une particule est 1 (monomère)
Pour $i \in \mathbb{N}$ une particule de masse i est formée de i particules de masse 1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} c(t,i) & = \dfrac{i}{2} \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} c(t,j)c(t,i-j) - c(t,i) \sum_{j=1}^{+\infty} (i+j)c(t,j), \ \forall t \geq 0, i,j \in \mathbb{N}^* \\ c(0,i) & = \delta_1(i), \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \end{cases} \qquad (SD+)$$

Remarques

- La condition initiale : à $t = 0$ on a que des particules de masse 1
- En 1916 Smoluchowski traite le cas du noyau constant $K = 1$
- Noyau additif $K(i,j) = i + j$: existence et unicité Golovin, 1963
- Noyau multiplicatif $K(i,j) = ij$: solution définie jusqu'à T_{gel} = temps de gélification

Conservation de la masse

$$\sum_{i=1}^{+\infty} ic(t,i) = 1$$

Outil probabiliste - Processus de branchement

Processus de branchement

Evolution de la taille des générations successives d'individus qui donnent chacun naissance à un nombre aléatoire de descendants suivant tous la même loi de reproduction $(p_k)_{k\geq 0}$. A l'instant initial on a un seul individu.

Cadre mathématique

Soit Y une variable aléatoire de loi de probabilité $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ - loi de reproduction

Hypothèses

- $0 < p_0 < 1$
- $0 < \mathbb{E}(Y) < +\infty$
- $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$

Fonction génératrice $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^+, \quad f(s) = \mathbb{E}\left[s^Y\right] = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i s^i$

Outil probabiliste - Processus de branchement

Processus de branchement Soit $(Y_i^n)_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ une famille de v.a. indépendantes et identiquement distribuées de même loi que Y

Y_i^n = le nombre de descendants du $i^{\text{ème}}$ individu de la génération n

On note par Z_n = le nombre d'individus à la génération n
À l'instant initial il y a un seul individu donc $Z_0 = 1$

On a alors

$$Z_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = -1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{Z_n} Y_i^n & \text{si} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Processus de branchement

Définition La famille de v.a. $(Z_n)_{n\geq 0}$ est un processus de branchement de type Galton-Watson

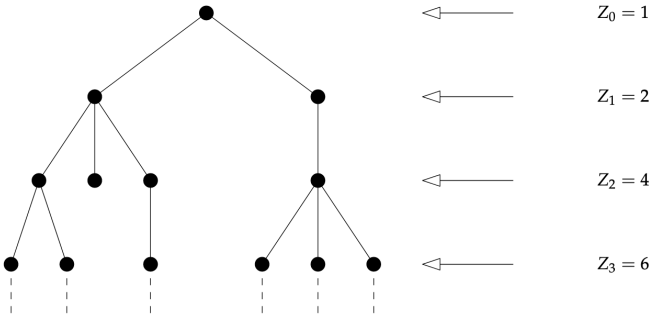


Figure: Processus de branchement

Processus de branchement

Comportement en fonction de $\mathbb{E}(Y)$, où Y est la loi de reproduction.

Extinction de la lignée : $\alpha := \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0)$ probabilité d'extinction.

Le processus de branchement est dit

- sous-critique : si $\mathbb{E}(Y) < 1$ alors $\alpha = 1$
- critique : si $\mathbb{E}(Y) = 1$ et $\mathbb{P}(Y = 1) < 1$ alors $\alpha = 1$
- sur-critique : si $\mathbb{E}(Y) > 1$ alors $\alpha < 1$

Processus de branchement

Population totale : $X = \sum_{n=0}^{+\infty} Z_n$

Notons par g la fonction génératrice de X :

$$g(s) = \mathbb{E}\left[s^X\right] = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i)s^i$$

Propriétés

(P1) $X < +\infty$ ssi $\mathbb{E}(Y) < 1$

(P2) $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2 + \ldots + \tilde{Y}_n = n - 1)$ où $(\tilde{Y}_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des v.a.i.i.d. de même loi que Y, loi de reproduction

(P3) On a

$$g(s) = sf(g(s))$$

avec f la fonction génératrice de Y

Équation de coagulation - noyau additif et processus de branchement

Équation $K(i,j) = i + j$ - conservation de la masse

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} c(t,i) & = \dfrac{i}{2} \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} c(t,j)c(t,i-j) - ic(t,i) \sum_{j=1}^{+\infty} c(t,j) - c(t,i), \forall t \geq 0, i,j \in \mathbb{N}^* \\ c(0,i) & = \delta_1(i), \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \end{cases} \qquad (SD+)$$

Proposition *Soit* $(c(t,i), i \geq 1, t \geq 0)$ *la solution de l'équation* $(SD+)$. *Alors, pour tout* $t \geq 0$ *on a*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} c(t,i) = e^{-t}.$$

Remarque Normalisation naturelle : pour $t \geq 0$ et $i \geq 1$ on pose

$$p(t,i) = c(t,i)e^{t}.$$

Équation de coagulation - noyau additif et processus de branchement

Conséquence $(p(t,i))_{i\geq 1}$ est une probabilité pour tout t.

Sa fonction génératrice

$$G(t,s) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(t,i)s^i \text{ pour } s, \text{ t.q. } |s| \leq 1$$

Proposition *La fonction $G(t,s)$ est l'unique solution de l'EDP*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t}(t,s) & = se^{-t}(G(t,s)-1)\dfrac{\partial G}{\partial s} \\ G(t,1) & = 1 \\ G(0,s) & = s. \end{cases} \qquad (GF+)$$

Processus de branchement associé à $(SD+)$

Objectif Construire un processus de branchement dont la population totale a comme fonction génératrice ce G .

Processus de branchement Soit un processus de Galton-Watson avec un ancêtre à l'instant initial et une loi de réproduction la loi de Poisson de paramètre $1 - e^{-t}$.

On note par X_t sa population totale.

Théorème *La fonction génératrice de X_t est l'unique solution de l'EDP $(GF+)$.*

Processus de branchement associé à $(SD+)$

Objectif Construire un processus de branchement dont la population totale a comme fonction génératrice ce G .

Processus de branchement Soit un processus de Galton-Watson avec un ancêtre à l'instant initial et une loi de réproduction la loi de Poisson de paramètre $1 - e^{-t}$.

On note par X_t sa population totale.

Théorème *La fonction génératrice de X_t est l'unique solution de l'EDP $(GF+)$.*

Idée de preuve : On utilise les propriétés $(P1), (P2)$ et $(P3)$

Processus de branchement associé à $(SD+)$

Sa fonction génératrice

$$G(t,s) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(t,i)s^i \text{ pour } s, \text{ t.q. } |s| \leq 1$$

Proposition *La fonction $G(t,s)$ est l'unique solution de l'EDP $(GF+)$*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t}(t,s) & = se^{-t}(G(t,s)-1)\dfrac{\partial G}{\partial s} \\ G(t,1) & = 1 \\ G(0,s) & = s \end{cases} \qquad (GF+)$$

pour tout $t \in [0,+\infty)$ et s t.q. $|s| \leq 1$.

Processus de branchement associé à $(SD+)$

Solution de l'équation de coagulation $(SD+)$

Résultats sur ce processus de branchement donnent la loi de X_t et conduisent ainsi à la forme de la solution de $(SD+)$.

Proposition *La solution* $(c(t,i))_{i\geq 1, t\geq 0}$ *de l'équation* $(SD+)$ *est donnée par*

$$c(t,i) = \frac{1}{i}\frac{(i(1-e^{-t})^{i-1}}{(i-1)!}e^{-t}e^{-i(1-e^{-t})}$$

pour tout $i \geq 1$ *et tout* $t \geq 0$.

Conclusion On peut retrouver des informations et caractéristiques essentielles de l'équation de coagulation par des outils probabilistes - ici les processus de branchement.

Équation de fragmentation et Processus stochastique à sauts

Équation de fragmentation

Question. Évolution de la taille des fragments dans les phénomènes de rupture (avalanche, éboulement, etc.) ?

Modèle de fragmentation - *équation type transport compliquée*

- Évolution d'un système de particules caractérisées par leurs masses
  $c(t,x)$ = concentration de particules de masse x à l'instant t

$$\frac{\partial}{\partial t}c(t,x) = \int_x^1 F(x,y-x)c(t,y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}c(t,x)\int_0^x F(y,x-y)\,\mathrm{d}y$$

F noyau de fragmentation, régit la dynamique - grande diversité de phénomènes

Équation de fragmentation

Question. Évolution de la taille des fragments dans les phénomènes de rupture (avalanche, éboulement, etc.) ?

Modèle de fragmentation - *équation type transport compliquée*

- Évolution d'un système de particules caractérisées par leurs masses
  $c(t,x)$ = concentration de particules de masse x à l'instant t

$$\frac{\partial}{\partial t}c(t,x) = \int_x^1 F(x, y-x)c(t,y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}c(t,x)\int_0^x F(y, x-y)\,\mathrm{d}y$$

F noyau de fragmentation, régit la dynamique - grande diversité de phénomènes

Avancées préliminaires

- Interprétation probabiliste : évolution de la masse d'une particule type $\rightsquigarrow$ *échelle microscopique*
- Algorithme de simulation probabiliste

Collaboration interdisciplinaire

- *Géophysiciens INRAE Grenoble*
- *Mathématiciens IMAR Bucarest*
- *Équipe Inria Nancy PASTA*

Fragmentation et processus stochastique à saut

Propriété : Soit $t \geq 0$, alors $Q_t(\mathrm{d}x) = p(t,x)\mathrm{d}x = xc(t,x)\mathrm{d}x, \forall x \in [0,1]$ est une probabilité.

- **Hypothèses pour F**

  (H) F est continu de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
  Le taux de perte de masse des particules de masse x est :

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x y(x-y)F(y,x-y)\mathrm{d}y & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

  F est t.q. ψ est continue sur $[0,1]$.

- **Remarque : la masse de la particule (taille)** $x \in [0,1]$ - connexion avec les processus de branchement

- **Exemple :** $F(x,y) := x + y$

Solution faible de l'équation de fragmentation

- **Définition** La famille $(Q_t)_{t\geq 0}$ de lois de probabilités sur $[0,1]$ est une solution faible de (EF) avec condition initiale Q_0 si :

$$\langle Q_t, \phi\rangle = \langle Q_0, \phi\rangle + \int_0^t \langle Q_s, \mathcal{F}\phi\rangle \mathrm{d}s,\ \forall \phi \in \mathcal{C}^1([0,1]),\ t\geq 0, \qquad \text{(EF-faible)}$$

où $\langle Q_t, \phi\rangle = \int_0^1 \phi(y) Q_t(\mathrm{d}y)$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$\boxed{\mathcal{F}\phi(x) = \int_0^x [\phi(x-y) - \phi(x)] \frac{x-y}{x} F(y, x-y)\mathrm{d}y.}$$

- **Objectif :** Construire un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ de loi $(Q_t)_{t\geq 0}$

Équation différentielle stochastique

- **Définition de la solution de l'EDS** $(EDS - F)$

  Soient $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et Q_0 une probabilité sur $[0,1]$.

  X est une solution de (EDS-F) si :

  - $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une processus adapté sur $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ à trajectoires dans $\mathbb{D}([0,+\infty[, [0,1])$.
  - La loi de $X_0 = Q_0$.
  - Il existe une mesure de Poisson $N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y, \mathrm{d}u)$ adaptée à $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ sur $[0,+\infty[\times[0,1[\times[0,1[$ d'intensité $\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u$ t.q. :

$$X_t = X_0 - \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 y 1_{\{y\in]0,X_{s-}[\}} 1_{\left\{u \leq \frac{X_{s-}-y}{X_{s-}} F(y, X_{s-}-y)\right\}} N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y, \mathrm{d}u)$$

Interprétation

- **Illustration**

- **Interprétation**

X peut-être interprété comme l'évolution de la masse d'une particule type dans le système.

À des instants aléatoires (poissoniens - donnés par la mesure de Poisson N) la particule se fragmente en deux particules de masses plus petites

- Masse la nouvelle particule est $X_{s-} - y$, $y \in]0, X_{s-}[$
- Temps à un taux $F(y, X_{s-} - y)\frac{X_{s-} - y}{X_{s-}}$ - simulation par des lois exponentielles

Connexions (EF), (EF-faible) et (EDS-F)

Théorème

Sous l'hypothèse (H) il existe une solution $X = (X_t)_{t\geq 0}$ de l'EDS de fragmentation $(EDS - F)$. Soit Q_t la loi de (X_t), $t\geq 0$. Alors, la famille $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ est une solution de $(EF - faible)$.

- **Comment revenir à l'équation initiale (EF) ?**

  Supposons que pour tout $t\geq 0$, Q_t est t.q. $Q_t(\mathrm{d}x) = p(t,x)\mathrm{d}x$. Alors $c(t,x) := \frac{p(t,x)}{x}$ est solution, au sens faible, de (EF): pour tout $t \geq 0$ et toute fonction test φ t.q.. $\phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} \in \mathcal{C}^1([0,1])$ on a :

$$\int_0^1 \varphi(x)c(t,x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \varphi(x)c_0(x)\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t \int_0^1 \int_0^x [\varphi(x-y) + \varphi(y) - \varphi(x)]F(y, x-y)c(s,x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

Processus de branchement

E espace mesurable (pour nous $E = [0,1]$)

$$\widehat{E} := \left\{ \mu \text{ mesure positive sur } E : \ \mu = \sum_{k=1}^{m} \delta_{x_k}, \ x_1, \ldots, x_m \in E \right\} \cup \{0\}.$$

Définition *Un processus de Markov X sur $\widehat{E}$ est un processus de branchement ssi pour toutes mesures $\mu_1, \mu_2 \in \widehat{E}$:*

$$X^{\mu_1+\mu_2} \overset{(d)}{=} X^{\mu_1} + X^{\mu_2}.$$

- **Interprétation probabiliste** À l'instant $t = 0$ la particule démarre dans un point de E et évolue (selon un processus de base X), jusqu'à un temps aléatoire, quand elle donne naissance à m particules indépendantes qui ont la même loi que la particule mère (même loi que X).
- **Fragmentation** Les particules se fragmentent indépendamment les une des autres donc on peut associer une propriété de branchement.

Fragmentation et branchement

- **Étapes**
  - Processus de Markov et équation de fragmentation
  - Processus de branchement associé à un noyau de fragmentation
  - Fragmentation comme limite de processus de branchement

Processus de Markov et équation de fragmentation

Proposition *Soient F un* **noyau de fragmentation borné** *et $Q_0 = \delta_x$. Alors :*

- *$(EF - faible)$ a une unique solution $(Q_{t,x})_{t\geq 0}$.*
- *La famille de noyaux $(Q_t)_{t\geq 0}$ sur $[0,1]$:*

$$Q_t f(x) := \langle Q_{t,x}, f\rangle, \ \forall\ f \in p\mathcal{C}_b([0,1]), x \in [0,1],$$

  est aussi la fonction de transition d'un processus de Markov à sauts $X^0 = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X^0_t, \mathbb{P}^x)$, à valeurs dans $[0,1]$ (Ethier, Kurtz).
- *Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}([0,1])$ et $\nu \in \mathcal{P}([0,1])$, $(\phi(X^0_t) - \int_0^t \mathcal{F}\phi(X^0_s)\mathrm{d}s,\ t\geq 0)$ est une $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$-martingale sous $\mathbb{P}^\nu$.*
- *L'EDS $(EDS - F)$, avec condition initiale δ_x, a une solution et cette solution a la même loi que $(X^0, \mathbb{P}^x)$.*

Processus de Markov pour des noyaux de fragmentation tronqués

Outils

- **Construction d'une suite de seuils pour la taille des particules** on fixe une suite $(d_n)_{n\geq 1} \subseteq]0,1[$, strictement décroissante qui converge vers 0.
  - **Noyau de fragmentation tronqué (borné)**

    Soit F un noyau de fragmentation. Pour $n\geq 1$ on définit

    $$F_n(x,y) := \mathbb{1}_{]d_n,1]}(x \wedge y)F(x,y),\ x,y \in E = [0,1].$$

  - **Processus de Markov pour le noyau F_n** (masse supérieure à d_n), en utilisant le théorème.
- **Processus de Markov tronqué par la taille d_n**
- **Résultat** Construction d'un processus de branchement associé. On a besoin de :
  - Définir le processus de Markov : $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$, sur E
  - Un noyau markovien : $B : bp\mathcal{B}(\widehat{E}) \longrightarrow bp\mathcal{B}(E)$

Processus de branchement associé au noyau

Théorème

Il existe un processus de branchement sur $\widehat{E}$, induit par le processus X avec espace d'états E, et par le noyau markovien B.

- **Processus de branchement induit par la solution de l'équation de fragmentation**

  Par le théorème, pour tout $n \geq 1$, il existe un processus de branchement sur $\widehat{E_n}$, induit par le processus X^n sur E_n, et par le noyau B^n, associé au noyau de fragmentation F.

Avalanches et phénomène de fragmentation

- Un modèle physique simplifié (noyau de fragmentation) pour l'avalanche
- Équation différentielle stochastique de fragmentation
- Simulation

Modèle physique pour le noyau de l'avalanche

- **Décrire l'avalanche via le modèle de fragmentation** avec un noyau de fragmentation qui intègre les propriétés physiques.

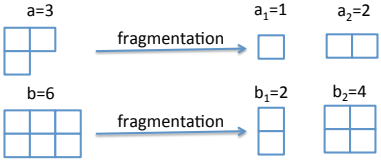
- **Noyau de fragmentation pour l'avalanche**

$$x + y \to x, y$$

tel que

$$\frac{\min(x, y)}{\max(x, y)} = cst.$$

- **Exemple** Si $cst. = 1/2$



Avalanche / noyau de fragmentation discontinu

- **Hypothèse**

  suggérée par la "propriété de rupture" dans les modèles déterministes pour l'avalanche de neige :
  (H) Il existe une fonction $\Phi :]0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[$ telle que

$$F(x, y) = \Phi\left(\frac{x}{y}\right), \ \forall\, x, y > 0$$

  Le noyau F est symétrique donc

$$\Phi(x) = \Phi\left(\frac{1}{x}\right), \ \forall\, x > 0.$$

Équation différentielle stochastique

- **Exemple :** Fixons un paramètre de rupture $r > 0$ représentant une proportionalité uniforme des fragments, constant en temps. Si on considère la fonction

$$\Phi^r(x) := \frac{1}{2}\delta_r(x) + \frac{1}{2}\delta_{1/r}(x), \quad \forall\, x > 0.$$

  Dans cette situation $F^r(x,y) = \frac{1}{2}(\delta_r(\frac{x}{y}) + \delta_{1/r}(\frac{y}{x}))$, vérifie (H).

- **Difficulté :** F^r n'est pas continu mais...
- **Noyau de branchement associé avec F^r:**

$$N_x^{F^r} := \lambda_0(\beta x \delta_{\beta x} + (1-\beta) x \delta_{(1-\beta)x}),$$

  où $\lambda_0 := \frac{\beta^2 + (1-\beta)^2}{4}$ avec $\beta := \frac{r}{1+r}$
- **Remarque :** N^{F^r} n'est plus markovien et n'est pas absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue.

Équation différentielle stochastique pour l'avalanche - noyau discontinu

Considérons l'EDS de fragmentation associée à l'avalanche $(EDS - A)$

$$X_t = X_0 - \int_0^t \int_0^\infty \left((1-\beta) X_{\alpha-} \mathbb{1}_{[\frac{s}{\beta\lambda_0} < X_{\alpha-} \leq 1]} + \beta X_{\alpha-} \mathbb{1}_{[\frac{s}{\lambda_0} < X_{\alpha-} \leq \frac{s}{\beta\lambda_0}]} \right) p(\mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}s) \quad (EDS - A)$$

où $p(\mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}s)$ est une mesure de Poisson d'intensité $\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}s$.

Rappel La solution X de cette EDS décrit l'évolution au cours du temps de la taille d'une particule typique dans le système :
- à des temps aléatoires de loi exponentielle

- soit, avec une certaine probabilité, a lieu la fragmentation de X en deux particules de tailles βX et $(1-\beta)X$
- soit, avec la probabilité complémentaire, la fragmentation n'a pas lieu

Propriété de scaling

Existence Pour résoudre l'EDS pour le modèle d'avalanche, on considère le noyau N^{F^r} sur $E = [0,1]$ et le processus à saut associé $(X_t)_{t\geq 0}$ avec espace d'état E.

Des résultats d'existence ont été démontré dans :
[L. Beznea, M.D., O. Lupașcu, *J. Stat. Phys.*, 2016]
[L. Beznea, M.D., O. Lupașcu, *Math & Comput. in Simul.*, 2019]

Proposition
La solution de l'équation de fragmentation de l'avalanche $(EDS - A)$ *avec donnée initiale* δ_x, *pour* $x \in E$ *vérifie la propriété de scaling suivante :*

$$\mathbb{E}_{sx}(X_t \in A) = \mathbb{E}_x\left(X_{ts} \in \frac{1}{s}A\right)$$

pourt tout $x \in E$, $t \geq 0$, $A \in \mathcal{B}(E)$ *et* $s \in]0,1]$.

Algorithme

- **Initialisation** : T le temps final, on pose $T_0 = 0$, on simule la particule initiale $X_0 \sim Q_0$
- **Étape** p , $p \geq 1$:
  - Simuler une variable aléatoire $S_p \sim \mathcal{E}(\lambda_0)$
  - Soit $T_p = T_{p-1} + S_p$
  - On définit $X_t = X_{p-1}$ pour tout $t \in [T_{p-1}, T_p[$
  - On définit

$$X_p = \begin{cases} \beta X_{p-1} & \text{avec probabilité } \beta X_{p-1}, \\ (1-\beta)X_{p-1} & \text{avec probabilité } (1-\beta)X_{p-1}, \\ X_{p-1} & \text{avec probabilité } 1 - X_{p-1} \end{cases} \tag{0.1}$$

  - **Stop**: Quand $T_p > T$
  - **Résultat**: L'approximation de la masse de la particule au temps T, X_{p-1}

Résultats numériques

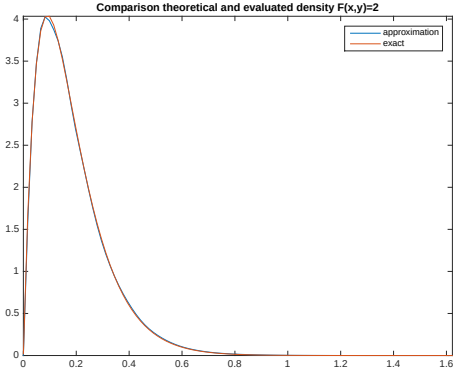


Figure: Comparaison entre la solution exacte et l'algorithme dans le cas $F(x, y) = 2$.

Résultats numériques

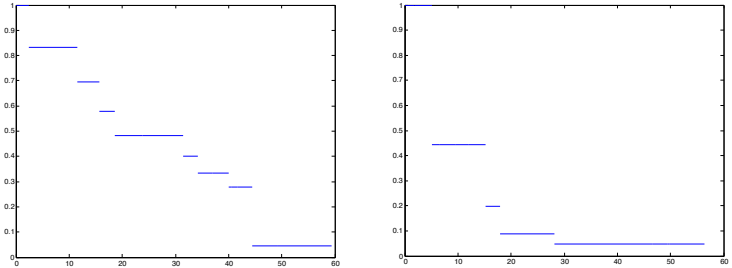


Figure: Trajectoire du processus de fragmentation avec noyau discontinu F^r et taille de la particule initiale 1

Résultats numériques

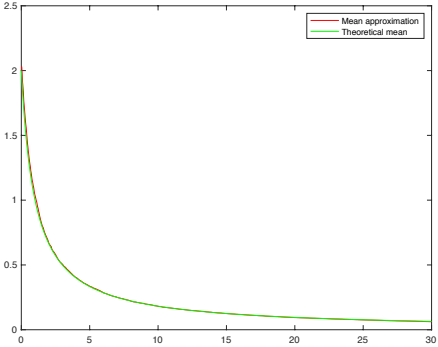


Figure: Évolution en temps de la moyenne empirique $t \mapsto \hat{I}_M(t)$ pour $r = 0.2$, paramètre Monte Carlo $M = 10^3$, et $t \in [0, 30]$.

Plus loin dans la simulation : Algorithme

Un algorithme de simulation général : Monte Carlo pour la simulation de la masse d'une particule type au temps T dans un processus de fragmentation

Données : Un noyau de fragmentation, un temps T et une masse m

Résultat : La masse à l'instant T d'une particule de masse m à l'instant initial

1. $t \leftarrow 0$
2. $M_{act} \leftarrow m$
3. **Tant que** $t < T$
    4. Simuler une variable aléatoire S de loi $\mathcal{E}(F(M_{act}))$
    5. Simuler une variable aléatoire M'_{act} de loi $\mathrm{G}(M_{act}, \cdot)$
    6. $M_{act} \leftarrow M'_{act}$
    7. $t \leftarrow \min\{T, t + S\}$
8. **Fin**
9. **Return** M_{act}

Plus loin dans la simulation : Algorithme

Notations

Taux de fragmentation

$$F(x) = \int_0^x F(x-y,y)\frac{x-y}{x}\mathrm{d}y = \int_0^x F(x-y,y)\frac{y}{x}\mathrm{d}y$$

On définit :

$$G(x,\mathrm{d}y) = \mathbb{1}_{[0,x]}(y)F(x-y,y)\frac{y}{x}\mathrm{d}y$$

Probabilité

$$\mathsf{G}(x,\mathrm{d}y) = \frac{G(x,\mathrm{d}y)}{F(x)}$$

Différents noyaux de fragmentation

$F(x,y)$	$G(x,y)$	$F(x)$	$G(x,[0,y])$
1	$\frac{y}{x}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{y^2}{x^2}$
$x+y$	y	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{y^2}{x^2}$
xy	$\frac{y^2(x-y)}{x}$	$\frac{x^3}{12}$	$\frac{4y^3}{x^3}-\frac{3y^4}{x^4}$
$\frac{1}{1+x+y}$	$\frac{y}{x(x+1)}$	$\frac{x}{2(1+x)}$	$\frac{y^2}{x^2}$
$\frac{1}{(x+y)^n}$, $n \geq 1$	$\frac{y}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{2x^{n-1}}$	$\frac{y^2}{x^2}$

Table: Calculs pour divers noyaux de fragmentation pour $y \in [0,x]$.

Illustrations numériques sur différents noyaux

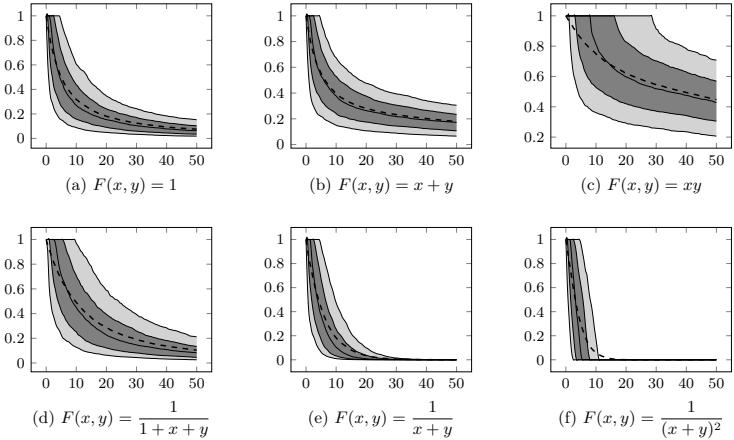
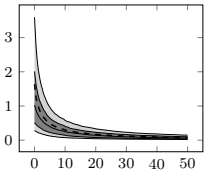
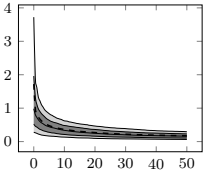


Figure: Statistiques de l'évolution d'un nuage de particules en temps. Chaque ligne représente un quantile (10 %, 20 %, 50 %, 75 %, 90 %, les lignes sont ordonnées du bas vers le haut), la ligne en pointillé représente la moyenne. La masse initiale est 1. Le nuage a 2000 particules.

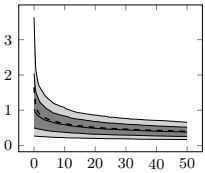
Illustrations numériques sur différents noyaux



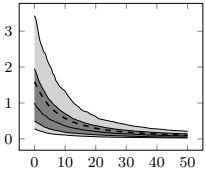
(a) $F(x,y) = 1$



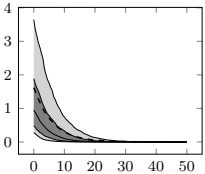
(b) $F(x,y) = x + y$



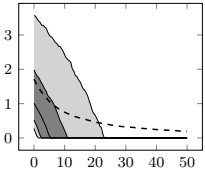
(c) $F(x,y) = xy$



(d) $F(x,y) = \dfrac{1}{1+x+y}$



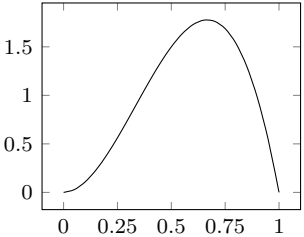
(e) $F(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$



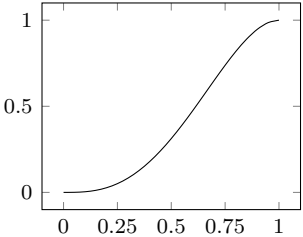
(f) $F(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^2}$

Figure: Statistiques de l'évolution d'un nuage de particules en temps. Chaque ligne représente un quantile (10 %, 20 %, 50 %, 75 %, 90 %, les lignes sont ordonnées du bas vers le haut), la ligne en pointillé représente la moyenne. La masse initiale suit la loi log-normale avec log-espérance 0 et log-variance 1.0. Le nuage a 2000 particules.

Illustrations numériques sur différents noyaux



(a) pdf



(b) df

Figure: Loi de densité (a) et fonction de répartition (b) pour $\mathrm{G}(x, \cdot)$ dans le cas du noyau multiplicatif $F(x, y) = xy$.

Illustrations numériques - conclusions

Comportement très différent en fonction

- du noyau de fragmentation
- du taux de fragmentation borné/non-borné
- de la condition initiale

Autres approches probabilistes

Fragmentation : partition de $[0,1]$ et chaîne de fragmentation, J. Bertoin, B. Haas, résultats importans sur le comportement asymptotique, phénoméne de shattering, formation de poussière, etc.

Coagulation : problèmes ouverts dans l'interprétation probabiliste, D. Aldous, 1999 article majeur dans l'impulsion de cette thématique dans les probas

Coagulation-fragmentation masses discrètes : I. Jeon, B. Jourdain, construction d'une chaîne de Markov, d'un processus stochastique non-linéaire et des algorithmes de simulation.

Coagulation et/ou fragmentation masses continues : M.D., N. Fournier, J-S. Giet, A. Lejay, J. Norris, E. Tanré, EDS non-linéaire, algorithmes de simulation probabilistes.

Croissance-fragmentation : dynamiques de populations en biologie, physique, neuroscience, J. Bertoin, B. Cavalli, J.A. Cañizo, P. Gabriel, Y. Holdaș, comportement en temps long.

Fragmentation homogène : propriété de scaling, J. Bertoin, W. Wagner

etc.

Autres approches probabilistes

Article de survey

M.D. et A.Lejay, *Probabilistic representations of fragmentation equations*, 2022

Fragmentation et représentations probabilistes

- Équations Fokker Planck et Kolmogorov
- Chaîne de Markov en temps continu
- Processus à sauts
- Équation différentielle stochastique
- PDMP

Autres approches probabilistes

Article de survey

M.D. et A.Lejay, *Probabilistic representations of fragmentation equations*, 2022

Fragmentation et représentations probabilistes

- Équations Fokker Planck et Kolmogorov
- Chaîne de Markov en temps continu
- Processus à sauts
- Équation différentielle stochastique
- PDMP

Important

- Méthodes numériques probabilistes faciles à implémenter
- Grande variété d'outils méthodologigues probabilistes

Conclusions et perspectives
Problèmes ouverts

Le défi. Construire un *modèle mathématique* pour l'évolution spatio-temporelle des fragments dans les phénomènes de rupture en géophysique (avalanche, éboulement, etc.)

Conclusions et perspectives
Problèmes ouverts

Le défi. Construire un *modèle mathématique* pour l'évolution spatio-temporelle des fragments dans les phénomènes de rupture en géophysique (avalanche, éboulement, etc.)

Comment. *Modélisation* par une équation de *coagulation* - fragmentation *non-linéaire complexe* (masse, *position*) des particules couplée avec

- caractérisation du temps de déclenchement de l'avalanche
- inclure les paramètres (température, humidité, etc.)

Conclusions et perspectives
Problèmes ouverts

Le défi. Construire un *modèle mathématique* pour l'évolution spatio-temporelle des fragments dans les phénomènes de rupture en géophysique (avalanche, éboulement, etc.)

Comment. *Modélisation* par une équation de *coagulation* - fragmentation *non-linéaire complexe* (masse, *position*) des particules couplée avec

- caractérisation du temps de déclenchement de l'avalanche
- inclure les paramètres (température, humidité, etc.)

Problèmes

? Problème physique $\Longrightarrow$ *cadre non-classique* (singularités, processus à sauts) & besoin de techniques novatrices : couplage fragmentation et processus de branchement

? Équation *non-locale* en *grande dimension*

Conclusions et perspectives

À long terme. *Caractérisation et prédiction des phénomènes de rupture et l'évaluation des risques, à destination des praticiens*

Objectifs

- Modélisation stochastique
  - évolution des phénomènes spatio-temporels
  - analyse mathématique
- Analyse des données
  - valorisation des données (météo, propriétés physiques)
  - validation des modèles
- Méthodes numériques probabilistes
  - évolution de l'avalanche
  - instant de déclenchement
  - quantifier le risque

Références

- M. Deaconu & A. Lejay *Probabilistic representations of fragmentation equations,* 2022.
- L. Beznea, M. Deaconu & O. Lupașcu-Stamate, *Scaling property for fragmentation processes related to avalanches*, Applications of Mathematics and Informatics in Natural Sciences and Engineering, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 334, 37-47, 2020.
- L. Beznea, M. Deaconu & O. Lupașcu-Stamate, *Numerical approach for stochastic differential equations of fragmentation; application to avalanches*, Mathematics and Computers in Simulation, 160, 111-125, MATCOM, 2019.
- L. Beznea, M. Deaconu & O. Lupașcu, *Stochastic equation of fragmentation and branching processes related to avalanches*, Journal of Statistical Physics, 162, 824-841, 2016.
- L. Beznea, M. Deaconu & O. Lupașcu, *Branching processes for the fragmentation equation*, Stochastic Processes and Their Applications, 125, no. 5, 1861–1885, 2015.